PS2315 Abril-Julio 2016
Dpto. Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar
Tarea 2

.

Leer Kamen y Heck: Secciones . 2.1, 2.2(menos 2.2.1) y 2.6

Fecha de entrega: viernes 29 de abril, antes de las 10:30 am, en el Departamento de Procesos y Sistemas. MYS 3er Piso.

Nota: i) Cada tarea debe estar plenamente identificada con Nombre, Apellido y Carnet.. ii) en cada problema debe mostrarse tanto su enunciado como su solución, ambas bien redactadas y nítidamente presentadas. iii) las tareas son individuales (pueden discutir entre ustedes las soluciones; sin embargo, no se aceptarán soluciones o argumentos "idénticos"). Violación a esta regla implicará NOTA CERO a todos los involucrados sin derecho areclamo alguno. iv) Todos los problemas de la 2da parte (que implican uso de Scilab) son obligatorios (de lo contrario tendrán CERO en la tarea).

1. (Aquí aprenderemos que la definición, construcción (mejor dicho motivación) de la señal impulso en tiempo continuo, no depende de la forma de la secuencia generatriz.) De lo visto en clase, podemos decir que un impulso unitario de tiempo continuo, $\delta\left(t\right)$, se caracteriza por las siguientes propiedades

   - $\delta\left(0\right) \rightarrow \infty$
   - $\delta\left(t\right) = 0, t \neq 0$
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t\right) dt = 1$
   - $\delta\left(.\right)$ es una señal par. O sea, $\delta\left(t\right) = \delta\left(-t\right), t \in R.$

   y vimos que es posible definir $\delta\left(.\right)$ como el límite de una secuencia de señales f_ε (pulsos rectangulares en nuestras notas, $\frac{1}{\varepsilon} rect_\varepsilon\left(t\right)$). Sin embargo, pueden emplearse, otras secuencias de señales (la forma no importa) para generar $\delta\left(t\right)$. Por ejemplo, defina

   $$d\left(t\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)\right)^2$$

   y Ud. puede demostrar que efectivamente:

   - $d\left(0\right) = \lim_{t \rightarrow 0+} d\left(t\right) = \infty$
   - $d\left(t\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \left(\frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)\right)^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)\right)^2 = 0$, para $t \neq 0$. (Recuerde que $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$).
   - Para ver que el área debajo de la curva o del grafo de $d\left(.\right)$ es la unidad, note que

   $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\left(t\right) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \left(\frac{i}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)\right)^2 dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)}{\frac{\pi t}{\varepsilon}}\right)^2 dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)}{\frac{\pi t}{\varepsilon}}\right)^2 dt \end{aligned}$$

y haciendo el cambio de variable

$$\tau = \frac{\pi t}{\varepsilon}$$

se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin(\tau)}{\tau}\right]^2 dt$$

y empleando la relación (encontrada en los libros de cálculo)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin(\tau)}{\tau}\right]^2 d\tau = \pi$$

concluimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(t)\, dt = 1$$

Finalmente, es claro que la señal $d(.)$ es par, ya que $d(t) = d(-t)\,, t \in R$. Por lo tanto, la secuencia

$$f_{\varepsilon}(t) = \varepsilon \left(\frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)\right)^2$$

se puede emplear como modelo matemático (o generatriz) de la señal impulso unitario.

(a) Complete todos los pasos, excepto el de $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin(\tau)}{\tau}\right]^2 d\tau = \pi$, de la demostración de que

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \left(\frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right)\right)^2$$

(b) Compruebe que la siguiente secuencia de señales puede emplearse como modelo de la señal impulso unitario:

$$d_1(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}$$

(c) Compruebe que la siguiente secuencia de señales puede emplearse como modelo de la señal impulso unitario:

$$d_2(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(t/\varepsilon)}{t}$$

Nota: Debe en esencia repetir el procedimiento empleado en la parte (a). No requiere demostrar todo; cualquier hecho matemático complicado, si es conocido úselo y haga referencia de la fuente dónde lo encontró.

2. Demuestre que el impulso unitario genralizado $\delta(\lambda)\,, \lambda \in T$, cumple

$$\delta(a\lambda + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(\lambda + \frac{b}{a}\right)$$

para $a, b \in R$.

Recuerde que la señal impulso unitario generalizado se define como aquella señal $\delta(.)$ tal que para toda señal $f \in S_e$, se tiene que

$$\left\langle f, q^{-\tau}\delta \right\rangle = \oint_{\lambda \in T} f(\lambda)\,\delta(\lambda - \tau)\,\mu(\tau) = f(\tau)$$

Por lo tanto, basta con verificar que

$$\oint_{\lambda \in T} f(\lambda)\,\delta(a\lambda + b)\,\mu(\tau) = \oint_{\alpha \in T} f(\alpha)\,\frac{1}{|a|}\delta\left(\alpha + \frac{b}{a}\right)\mu(\alpha)$$

Ayuda: Considere caso 1: $a \geq 0$, caso 2: $a < 0$ e integre recordando la definición de valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

3. (objetivo: obtener destreza en el manejo de señales impulsos usando los resultados del problema (2)), Evalúe las siguientes sumas generalizadas:

   (a) $$\oint_{\lambda \in (-\infty,\infty)} \left[\tfrac{2}{3}\lambda - \tfrac{3}{2}\right]\delta(\lambda - 1)\,\mu(\lambda)$$

   (b) $$\oint_{\lambda \in (-\infty,\infty)} [\lambda - 1]\,\delta\left(\tfrac{2}{3}\lambda - \tfrac{3}{2}\right)\mu(\lambda)$$

   (c) $$\oint_{\lambda \in [-3,-2]} \left[e^{(-\lambda+1)} + \sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\lambda\right)\right]\delta\left(\lambda - \tfrac{3}{2}\right)\mu(\lambda)$$

   (d) $$\oint_{\lambda \in (-3,+2)} \left[e^{(-\lambda+1)} + \sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\lambda\right)\right]\delta\left(\lambda - \tfrac{3}{2}\right)\mu(\lambda)$$

   Nota: Recuerde que debe presentar los casos: $\lambda = t$ y $\lambda = k$, y ver si se puede integrar (en forma generalizada) las respuestas respectivas.

4. Determinar gráficamente la comvolución de las siguientes parejas de señales:

   (a) $f(t) = rect_2(t)\,,\ g(t) = -\frac{1}{2}rect\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}rect_2\left(t - \frac{1}{2}\right)$

   (b) $f(t) = 2rect_1\left(t + \frac{1}{2}\right) + \delta(t - 2)\,,\ g(t) = rect_2(t)$

   (c) $f(t) = trian_2\left[2\left(t + \frac{1}{2}\right)\right] - trian_2\left[2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right],\ g(t) = \frac{1}{2}peine_1\left(\frac{t}{2}\right)$, donde $trian(t) = \begin{cases} 1 - |t|\,, & -1 < t < 1, \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$ y

   $$peine_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nh)$$

   con $h > 0$.

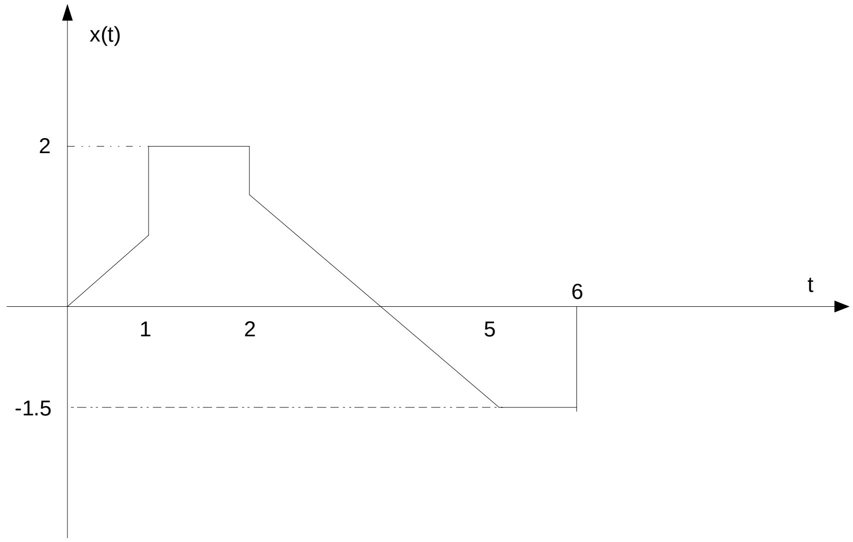

Figure 1: Señal de tiempo continuo

(d) $f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k = 0,1,2,3 \\ -2, & k = 4,5 \\ 0, & k > 6 \end{cases}$ y $g(k) = esc(k)$

(e) $f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k = 0,1,2,3 \\ -2, & k = 4,5 \\ 0, & k > 6 \end{cases}$ y $g(k) = esc(k-4)$

(f) $f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k = 0,1,2,3 \\ -2, & k = 4,5 \\ 0, & k > 6 \end{cases}$ y $g(k) = esc(k) - esc(k-4)$

Nota: Use propedades de la convolución para responder (e) y (f) de una manera muy sencilla usando el resultado (d).

5. (Obligatorio)Determine analíticamente la convolución de las siguientes señales de tiempo discreto: $h(k) = esc(k) - esc(k-N)$, N un entero positivo, y $u(k) = a^k esc(k)$ con $|a| < 1$.

   Use la conocida igualdad de progresión geométrica

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}, N_2 \geq N_1$$

6. Considere la señal de tiempo continuo, $x(t)$, mostrada en la figura (1)

   Determine y grafique:

   (a) $\frac{d}{dt}x(t)$ y $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau, t \in R$.

(b) $\{x(-t)+x(t)\} * \{\delta(t+8)+\delta(t-8)\}$

(c) $[20+x(t)]\sin(2\times 10^6 \pi t)$ para $-1 \leq t \leq 8$.

7. (Obligatorio) Encuentre un sistema real de tiempo continuo, P_r, (Describa brevemente su funcionamiento), muestre un modelo físico, P_f, conjuntamenmte con su modelo matemátco, P_m. (Nota sólo reproduzca lo hecho en clase usando el levitador magnético buecando la informacion en la WEB). Su sistema puede ser uno de los siguientes tipos:

   (a) electromecánico (motor, generador, etc)

   (b) térmico

   (c) proceso químico (torre de destilación, tanque de mezclado, etc)

   (d) robótica

   (e) biológico

   (f) térmico

   etc.

   Nota: deben indicar la fuente dónde encontró la información sobre la planta, proceso o sistema (todos son sinóminos).

Todos los problemas que se presentan a continuación requieren el uso de SCILAB. Cada solución (programa) deberá presentar tanto la solución analítica (de ser necesaria) y copia del programa de scilab (con su nombre, carnet y los comentarios adecuados para entender su funcionamiento) como las correspondientes gráficas (tituladas y con sus ejes etiquetados).

1. Resuelva el problema 2.10 del libro de Kamen and Heck usando Scilab.

2. Mediante Scilab, grafique la señal $g(k)$

   (a) $g(k) = rect_1(k) * \sin\left(\frac{2\pi k}{9}\right)$

   (b) $g(k) = rect_2(k) * \sin\left(\frac{2\pi k}{9}\right)$

   (c) $g(k) = rect_4(k) * \sin\left(\frac{2\pi k}{9}\right)$

3. La integral

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, g(t)\, dt$$

   puede aproximarse mediante la suma de bandas rectangulares de ancho h, como se muestra a continuación

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, g(t)\, dt \simeq \sum_{k=1}^{N} f(kh)\, g(kh)\, .h$$

   En la expresion anterior

$$h = \frac{(t_2 - t_1)}{N}$$

y N es un entero positivo que determinará la calidad de la aproximación. (Ud. deberá seleccionarlo)

Esriba un programa en Scilab para "verificar" computacionalmenmte que

$$f_\varepsilon(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon^2}} e^{\left[\frac{-t^2}{2\varepsilon^2}\right]}$$

se puede utilizar como modelo matemático de la función impulso unitario (delta de Dirac), aproximando las siguientes integrales por la suma:

(a) $\int_{-1}^{1} f(t) f_\varepsilon(t)\, dt$

(b) $\int_{-2}^{1} f(t) f_\varepsilon(t+1)\, dt$

(c) $\int_{-1}^{2} f(t) f_\varepsilon(t-1)\, dt$
donde $f(t) = t + 1$.